Devoir surveillé de Mathématiques n°3

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (section hexagonale d'un cube)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;0)$, $E(0;1;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $\Omega(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

On définit également les points $M(\alpha;0;0)$ et $N(0;\alpha;0)$ où $\alpha \in \,]0;1[$ et on note $\mathcal{P}$ le plan $(M\Omega N)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées des points P, Q, R et S intersections respectives du plan $\mathcal{P}$ avec les droites (BE), (GE), (GF) et (AF).
3. Déterminer α pour que les points M, N, P, Q, R et S soient situés sur un même cercle de centre Ω.
4. Montrer que dans ce cas, $MNPQRS$ est un hexagone régulier.

Exercice 2 (quelques propriétés du tétraèdre régulier)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0;0;0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0)$, $C(\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $D(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1. Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier et déterminer la longueur de ses arêtes.
2. Calculer l'aire a du tétraèdre $ABCD$.
3. Déterminer le volume v et la hauteur h du tétraèdre $ABCD$.
4. Déterminer le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, en déduire le diamètre d de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ ainsi que l'angle central $\alpha = \widehat{A\Omega B}$ du tétraèdre $ABCD$.
5. Déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan (ABC) et un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan(ABD), en déduire l'angle β entre les faces du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3 (équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants)

On considère l'équation différentielle $\boxed{(E) : ty'' - y' - 4t^3y = 0}$ où y est une fonction de la variable t à valeurs réelles définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Montrer que les fonctions $f : t \mapsto e^{t^2}$ et $g : t \mapsto e^{-t^2}$ sont solutions de (E).
2. Résoudre les équations différentielles $\boxed{(E_1) : ty' - y = 0}$ et $\boxed{(E_2) : y' - 2ty = ate^{-t^2}}$ où y est une fonction de la variable t à valeurs réelles définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et a est un nombre réel.
3. Étant donnée une solution y de (E), on définit la fonction $w : t \mapsto e^{t^2}(y'(t) - 2ty(t))$, montrer que w est solution de (E_1).
4. En déduire que si y est une solution de (E) alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que y soit solution de (E_2).
5. Déterminer les solutions de l'équation (E).

Exercice 4 **(équation fonctionnelle)**

On considère l'équation fonctionnelle $\boxed{(E) : f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}}$ où f est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $\boxed{(E_1) : \begin{array}{rcl} y'' + ay & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \end{array}}$ où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et a est un nombre réel pour $a = 0$, pour $a > 0$ et pour $a < 0$.
2. Montrer que la fonction nulle, la fonction identité ainsi que les fonctions sinus et sinus hyperbolique sont solutions de (E).
3. Montrer que si f est solution de (E) alors $f(0) = 0$.
4. Montrer que si f est solution de (E) alors f est solution de l'équation $f''(t)f(s) + f(t)f''(s) = 0$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.
5. En déduire que si f est solution de (E) alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit solution de (E_1).
6. Déterminer les solutions de l'équation (E).